REFLEXIONA Y RESUELVE

¿Cuántas parejas de conejos?

Para resolver el problema propuesto en la página anterior, razona del siguiente modo:

— Cada pareja de conejos es *inmadura* (i) el primer mes de su vida y *madura* (m) en adelante.

— A lo largo del proceso (un año) no muere ningún conejo. Por tanto, el número de parejas que hay en cierto mes es igual a las que había el mes anterior más las que nacen.

— Las parejas maduras que hay en cierto mes son todas las que había (maduras o inmaduras) el mes anterior, pues ya tienen más de un mes de vida.

Por ejemplo, el sexto mes hay 8 parejas, 5 de las cuales son las que vivían el quinto mes, y las otras 3 son las que han nacido. ¿Por qué han nacido 3? Porque en el quinto mes había 3 parejas maduras, tantas como parejas había en el cuarto mes.

Razona de este modo, mes a mes.

La sucesión de Fibonacci y el número Φ

Si dividimos cada dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, obtenemos:

1 1 2 3 5 8 13 21

$$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{13}{8} \quad \frac{21}{13}$$

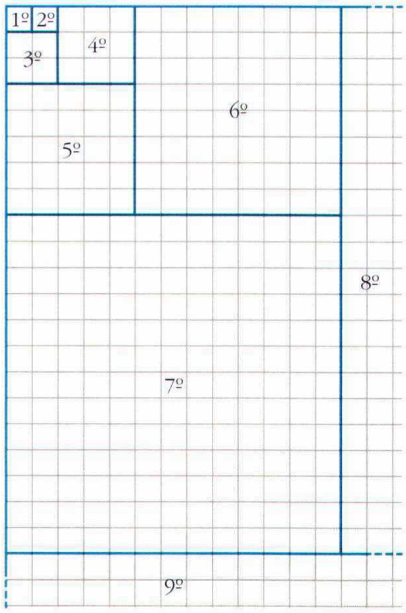
1 2 1,5 1,66 1,6 1,625 1,615

Parece que estos cocientes se aproximan a un número decimal de la forma 1,61… Comprueba, calculando nuevos cocientes, que el número al que se aproximan es el número áureo.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$$

Una representación gráfica

Observa esta composición hecha con cuadrados:

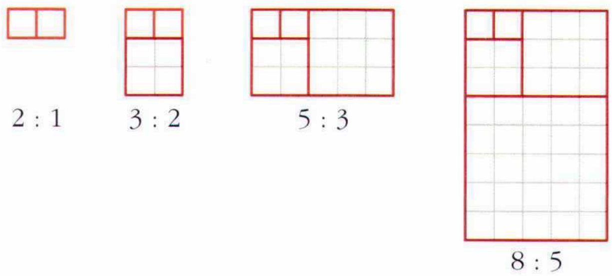


El lado de los cuadrados primero y segundo es 1. A partir del tercero, el lado de cada uno de los siguientes cuadrados que se van formando es igual a la suma de los lados de los dos que le preceden.

¿Cuál es el lado del 8º? ¿Y el del 9º?

¿Podrías representarlos en una gran hoja de papel cuadriculado?

Observa también los rectángulos que se forman sucesivamente:



Los cocientes entre sus dimensiones forman la sucesión que estudiamos en el apartado anterior. Se aproximan, por tanto, al número **Φ**. Esto quiere decir que estos rectángulos se parecen, cada vez más, a rectángulos áureos.

Compruébalo para los cuatro siguientes rectángulos:

13 : 8 21 : 13 34 : 21 55 : 34

2.1 CONCEPTO DE SUCESIÓN

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente, de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero...

Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con los subíndices correspondientes a los lugares que ocupan en la sucesión:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

Por ejemplo 1, 5, 9, 13, 17, ... es una sucesión. En ella, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$, $a_4 = 13$, $a_5 = 17$, ...

En las sucesiones que manejamos habitualmente existe algún **criterio** que permite obtener los sucesivos términos.

— En la sucesión anterior, 1, 5, 9, 13, 17, ..., cada término, a partir del segundo, se obtiene sumando 4 al anterior.

— En la sucesión de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Descubrir el criterio por el que se forman las sucesiones siguientes y añadir dos términos a cada una:*

a) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

b) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

c) 1, –3, 9, –27, 81, ...

d) 2, 4, 6, 10, 16, 26, ...

e) 110, 90, 70, 50, 30, ...

f) 1, 3, 6, 8, 16, 18, 36, ...

a) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa:

$$a_7 = 49, \ a_8 = 64$$

b) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por 2 el anterior: $b_7 = 128$, $b_8 = 256$

c) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por –3 el anterior: $c_6 = -243$, $c_7 = 729$

d) Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores: $d_7 = 42$, $d_8 = 68$

e) Cada término, a partir del segundo, se obtiene restándole 20 al anterior: $e_6 = 10$, $e_7 = -10$

f) Los términos pares, a partir del segundo, se obtienen sumando 2 al anterior: $f_8 = 38$

Los términos impares, a partir del tercero, se obtienen multiplicando por 2 el anterior: $f_9 = 76$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Di el criterio por el que se forman las sucesiones siguientes y añade dos términos a cada una:

a) 3, 8, 13, 18, 23, ...

b) 1, 8, 27, 64, 125, ...

c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, ...

d) 8; 4; 2; 1; 0,5; ...

e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...

f) 8, 3, 5, –2, 7, –9, ...

g) 1, –2, 3, –4, 5, –6, ...

h) 20, 13, 6, –1, –8, ...

Término general de una sucesión

A veces podemos encontrar una expresión que sirva para obtener un término cualquiera de una sucesión con solo saber el lugar que ocupa.

Por ejemplo, para la sucesión 1, 5, 9, 13, 17, … encontramos la expresión $a_n = 4n - 3$, pues dándole a n los valores 1, 2, 3, 4, 5, … obtenemos los términos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$

$a_n = 4n - 3$ es el **término general** de esa sucesión.

Se llama **término general** de una sucesión, y se simboliza con a_n, al término que representa a uno cualquiera de ella.

Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula, $a_n = f(n)$. Dándole a n un cierto valor natural, se obtiene el término correspondiente.

Hay otras sucesiones en las que cada término se obtiene operando dos o más de los anteriores. Se llaman **recurrentes**. En ellas no es nada fácil obtener el término general. Si este no se conoce, para hallar un término hay que obtener, previamente, todos los anteriores.

1. En tu CD tienes una **ampliación teórica** sobre el término general de una sucesión y la forma recurrente.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Dar el término general de las sucesiones que no sean recurrentes:*

a) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

b) 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

c) 1, –3, 9, –27, 81, …

d) 2, 4, 6, 10, 16, 26, …

e) 110, 90, 70, 50, 30, …

f) 1, –4, 9, –16, 25, –36, …

a) $a_n = n^2$

b) $b_n = 2^n$

c) $c_n = (-3)^{n-1}$

d) Es recurrente.

e) $110 - 20(n - 1)$

f) $(-1)^{n+1} \cdot n^2$. El factor $(-1)^{n+1}$ sirve para que los términos impares sean positivos y los pares sean negativos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

2. Forma una sucesión recurrente, a_n, con estos datos: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

3. Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen como término general:

$$a_n = 3 + 5(n - 1), \quad b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad c_n = (-1)^n\, 2^n$$

$$d_n = (n - 1)(n - 2), \quad e_n = n^2 + (-1)^n\, n^2$$

4. Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$.

5. Da el término general de las sucesiones siguientes que no sean recurrentes:

a) 3, 8, 13, 18, 23, …

b) 1, 8, 27, 64, 125, …

c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, …

d) 8, 4, 2, 1, …

e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, …

f) 8, 3, 5, –2, 7, –9, …

g) 1, –2, 3, –4, 5, –6, …

h) 20, 13, 6, –1, –8, …

2.2 ALGUNOS TIPOS IMPORTANTES DE SUCESIONES

Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando un mismo número, d, al que se llama **diferencia** de la progresión.

El **término general**, a_n, de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d se obtiene así:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

¿ES a_n PROGRESIÓN ARITMÉTICA?

Para comprobar si una sucesión

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \dots$$

es progresión aritmética, resta cada dos términos consecutivos:

$$a_2 - a_1, \; a_3 - a_2, \; a_4 - a_3, \; \dots$$

y comprueba si las diferencias coinciden:

$$¿a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots?$$

Por ejemplo:

a) 11, 17, 23, 29, … $a_1 = 11$, $d = 6$, $a_n = 11 + (n-1)\cdot 6 = 6n + 5$

b) 3, –1, –5, –9, … $b_1 = 3$, $d = -4$, $b_n = 3 + (n-1)(-4) = -4n + 7$

Es especialmente importante la obtención de la suma de varios términos consecutivos de una progresión aritmética. Recordémoslo.

La **suma** de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d \\ a_{n-1} = a_n - d \end{cases} \quad \text{Por tanto:}$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$$

Análogamente, se prueban las demás.

La **demostración** de esta fórmula se basa en la siguiente propiedad:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

Es decir, la suma de dos términos equidistantes de los extremos es siempre la misma.

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S_n = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + \dots + & a_{n-2} & + & a_{n-1} & + & a_n \\
S_n = & a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & + \dots + & a_3 & + & a_2 & + & a_1 \\
\hline
2S_n = & (a_1 + a_n) & + & (\quad) & + & (\quad) & + \dots + & (\quad) & + & (\quad) & + & (\quad)
\end{array}$$

Los n paréntesis valen $a_1 + a_n$. Por tanto, $S_n = n(a_1 + a_n)/2$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son *progresiones aritméticas*? En cada una de ellas di su diferencia y añade dos términos más:

a) 3, 7, 11, 15, 19, …

b) 3, 4, 6, 9, 13, 18, …

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, …

d) 10, 7, 4, 1, –2, …

e) 17,4; 15,8; 14,2; 12,6; 11; …

f) –18; –3,1; 11,8; 26,7; 41,6; …

2. En la sucesión 1a), halla el término a_{20} y la suma de los 20 primeros términos.

3. En la sucesión 1d), halla el término d_{40} y la suma de los 40 primeros términos.

4. En la sucesión 1e), halla el término e_{100} y la suma de los 100 primeros términos.

5. En la sucesión 1f), halla los términos f_8, f_{17} y la suma $f_8 + f_9 + \dots + f_{16} + f_{17}$.

Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por un mismo número, r, al que se llama **razón** de la progresión.

El **término general** a_n de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r se obtiene así:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Por ejemplo:

a) 3, 6, 12, 24, … $a_1 = 3,\ r = 2,\ a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) 18, 6, 2, 2/3, … $b_1 = 18,\ r = 1/3,\ b_n = 18 \cdot (1/3)^{n-1}$

¿ES a_n PROGRESIÓN GEOMÉTRICA?

Para comprobar si una sucesión

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$

es progresión geométrica, divide cada dos términos consecutivos:

$$a_2/a_1,\ a_3/a_2,\ a_4/a_3,\ \ldots$$

y comprueba si los cocientes coinciden:

$$¿a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = \ldots?$$

La **suma** de los n primeros términos de una progresión geométrica con $r \neq 1$ es: $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$

Demostración:

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad + a_{n-1} + a_n \\ r \cdot S_n &=& \quad a_2 + a_3 + a_4 + \ldots \quad + a_n + a_n r \\ \hline r \cdot S_n - S_n &=& -a_1 \qquad\qquad\qquad + a_n r \end{array}$$

$$S_n(r-1) = a_n r - a_1 \quad \to \quad S_n = (a_n r - a_1)/(r-1)$$

NOTA PARA LA DEMOSTRACIÓN

Al calcular $r \cdot S_n$ se ha tenido en cuenta que:

$a_1 r = a_2 \quad a_2 r = a_3 \quad a_3 r = a_4 \quad \ldots$

$a_{n-1} r = a_n$

Cuando $|r| < 1$, la fórmula anterior conviene ponerla así:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

El sumando $a_n r$ se hace tanto más pequeño cuanto mayor sea n y si n es muy grande, $a_n r$ es prácticamente cero. El siguiente resultado se basa en esta propiedad:

La **suma** de los infinitos términos de una progresión geométrica en la que $|r| < 1$ se obtiene así: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

6. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son *progresiones geométricas*? En cada una de ellas di su razón y añade dos términos más:

a) 1, 3, 9, 27, 81, … b) 100; 50; 25; 12,5; …

c) 12, 12, 12, 12, 12, … d) 5, –5, 5, –5, 5, –5, …

e) 90, –30, 10, –10/3, 10/9, …

7. Calcula la suma de los 10 primeros términos de cada una de las progresiones geométricas del ejercicio anterior.

8. ¿En cuáles de las progresiones geométricas del ejercicio anterior puedes calcular la suma de sus infinitos términos? Hállala.

Sucesiones de potencias

Nos encontraremos con frecuencia con sucesiones del tipo

$$1^m, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m, 6^m, \ldots, n^m, \ldots$$

sobre todo para $m = 2$ y $m = 3$. Es decir, las sucesiones de los **cuadrados** y de los **cubos** de los números naturales.

Son especialmente importantes las siguientes fórmulas, que damos sin demostrar porque su demostración supera los niveles de este curso.

2. Puedes encontrar en tu CD la **demostración** de las dos igualdades de la derecha.

SUMA DE LOS n PRIMEROS CUADRADOS:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

SUMA DE LOS n PRIMEROS CUBOS:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Sucesión de Fibonacci

LENGUAJE MATEMÁTICO

En matemáticas es muy frecuente nombrar determinados resultados de especial relevancia con el nombre de su descubridor: sucesión de Fibonacci, teorema de Pitágoras...

Como ya hemos dicho en las páginas introductorias, se llama así a la siguiente sucesión:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores. Está dada, por tanto, en *forma recurrente*:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

Existe para esta sucesión una fórmula general muy complicada. Puedes encontrarla en la entrada 1. de tu CD.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Calcular:*

$20^2 + 21^2 + 22^2 + \ldots + 50^2$

Puesto que la fórmula que conocemos es para obtener $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, procederemos del siguiente modo:

$$20^2 + \ldots + 50^2 = (1^2 + \ldots + 50^2) - (1^2 + \ldots + 19^2) =$$

$$= \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} - \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6} =$$

$$= 42\,925 - 2\,470 = 40\,455$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

9. Calcula:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2$$

10. Calcula:

$$50^2 + 51^2 + \ldots + 60^2$$

11. Calcula:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3$$

12. Calcula:

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3$$

2.3 LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

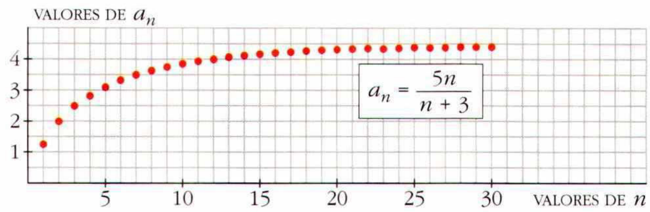
Representación gráfica de algunas sucesiones

Para estudiar el comportamiento de algunas sucesiones, empecemos representándolas gráficamente.

- Si en la expresión $a_n = \frac{5n}{n+3}$ sustituimos n por 1, 2, 3, ..., 10, ..., obtenemos:

$$a_1 = \frac{5}{4} = 1{,}25; \quad a_2 = \frac{10}{5} = 2; \quad a_3 = \frac{15}{6} = 2{,}5; \quad \ldots; \quad a_{10} = \frac{50}{13} = 3{,}8$$

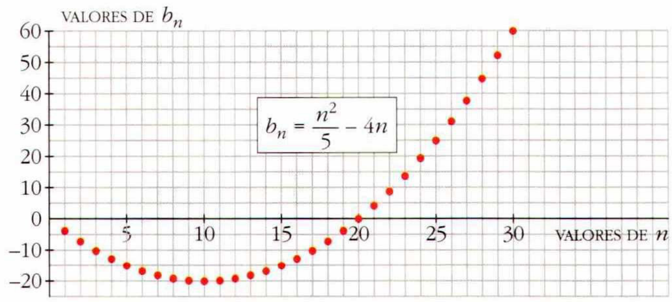
Estos resultados se pueden representar sobre unos ejes del siguiente modo:



Observamos que los elementos de la sucesión se acercan cada vez más a 5. Eso lo expresamos así:

$$\text{lím } a_n = \text{lím } \frac{5n}{n+3} = 5$$

- Procedemos de forma análoga con la sucesión $b_n = \frac{n^2}{5} - 4n$:



Aunque los términos de la sucesión empiezan decreciendo, a partir de uno de ellos empiezan a crecer y se hacen muy grandes, cada vez más. Esto lo expresamos así:

$$\text{lím } b_n = \text{lím } \left(\frac{n^2}{5} - 4n\right) = +\infty$$

Para hallar el límite de una sucesión estudiamos su comportamiento para términos muy avanzados, es decir, cuando n toma valores cada vez mayores.

COMPRUEBA

Calcula a_{100}, $a_{1\,000}$, $a_{10\,000}$, ... y comprueba que *"cada vez están más próximos a 5"*.

LENGUAJE MATEMÁTICO

Entre los matemáticos es habitual utilizar abreviaturas para escribir palabras de uso frecuente:

lím por límite
cos por coseno
log por logaritmo

COMPRUEBA

Calcula b_{100}, $b_{1\,000}$, $b_{10\,000}$, ... y comprueba que *"sus valores crecen cada vez más"*.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Representa la sucesión $a_n = \frac{4n+10}{2n-1}$ y asígnale un valor a su límite.

2. Representa la sucesión $b_n = \frac{n^2}{4} - 2n + 3$ y asígna un valor a su límite.

Aproximación a la idea de límite de una sucesión

LENGUAJE MATEMÁTICO

El símbolo $\rightarrow$ se lee "tiende a" cuando estamos tratando con límites. En otros casos, sirve para señalar un paso en un razonamiento.

Cuando una sucesión, a_n, tiene uno de los comportamientos que se describen a continuación, podemos atribuirle un límite.

- Si se acerca a un número, l, decimos que:

$$a_n \rightarrow l \quad \text{o bien que} \quad lím\ a_n = l$$

expresiones que se leen así:

"*a_n tiende a l*", "*el límite de a_n es l*"

ATENCIÓN

$+\infty$ y $-\infty$ no son números. Son símbolos que representan ciertos comportamientos entre las sucesiones.

- Si crece de modo que sus valores acaban superando a cualquier número, decimos que:

$$a_n \rightarrow +\infty \quad \text{o bien que} \quad lím\ a_n = +\infty$$

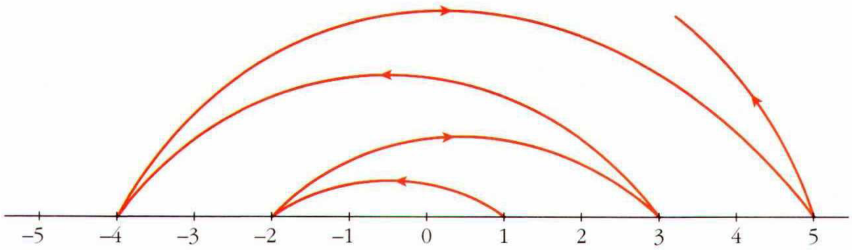
- Si decrece, tomando valores menores que cualquier número negativo, por grande que sea su valor absoluto, ponemos:

$$a_n \rightarrow -\infty \quad \text{o bien que} \quad lím\ a_n = -\infty$$

Sucesiones que no tienen límite

La sucesión siguiente

$$1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ 7,\ -8,\ \dots,\ a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$



no se acerca a ningún número, ni tiende a $+\infty$ (porque los términos pares son negativos) ni a $-\infty$ (porque los términos impares son positivos). Por tanto, no tiene límite.

Hay muchas sucesiones que no tienen límite finito ni infinito (a veces se las llama *sucesiones oscilantes*).

Resumen

Si nos fijamos en el comportamiento de una sucesión para términos suficientemente avanzados de ella (prescindiendo de sus posibles "locuras de juventud" y atendiendo solo a su comportamiento maduro), observaremos que puede ocurrir una de estas cosas:

QUE SE ACERQUE A UN NÚMERO l	$a_n \rightarrow l$
QUE CREZCA SUPERANDO CUALQUIER NÚMERO	$a_n \rightarrow +\infty$
QUE DECREZCA POR DEBAJO DE CUALQUIER NÚMERO	$a_n \rightarrow -\infty$
QUE OSCILE	a_n carece de límite

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Estudiar el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indicar en cada una de ellas cuál es su límite:*

a) $a_n = 3 + \frac{10}{n}$

b) $b_n = \frac{n^2 - n}{2}$

c) $c_n = 7n - n^2$

a) $a_{10} = 3 + \frac{10}{10} = 4$, $a_{100} = 3 + \frac{10}{100} = 3{,}1$, $a_{1\,000} = 3 + \frac{10}{1\,000} = 3{,}01$

Observamos que el sumando $\frac{10}{n}$ se hace tan próximo a cero como queramos, sin más que darle a n valores muy grandes.

Por tanto, $lím\ a_n = 3$.

b) $b_{10} = \frac{100 - 10}{2} = 45$, $b_{100} = \frac{10\,000 - 100}{2} = 4\,950$, $b_{1\,000} = 499\,500$

Observamos que el minuendo del numerador, n^2, crece mucho más rápidamente que el sustraendo, n. Por tanto, la diferencia se hace tan grande como queramos, aunque la dividamos por 2.

Es decir, $lím\ b_n = +\infty$.

c) Análogamente, observamos que, en c_n, el sustraendo crece mucho más rápidamente que el minuendo. La diferencia tiende a $-\infty$:

$$lím\ c_n = -\infty$$

2. *Comprobar si tienen límite estas sucesiones:*

a) $a_n = (-3)^n$

b) $b_n = (-1)^n \cdot \frac{n+2}{n}$

c) $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$

a) $a_1 = -3$, $a_2 = 9$, $a_3 = -27$, $a_4 = 81$, $a_5 = -243$

Los términos impares son negativos y tienden a $-\infty$.

Los términos pares son positivos y tienden a $+\infty$.

La sucesión no tiene límite.

b) $b_1 = -3$; $b_2 = 2$; $b_3 = -1{,}66$; $b_4 = 1{,}5$; …; $b_{99} = -1{,}0202…$; $b_{100} = 1{,}02$

Los términos impares son negativos y tienden a -1.

Los términos pares son positivos y tienden a 1.

La sucesión no tiene límite.

c) $c_1 = -1$; $c_2 = 0{,}5$; $c_3 = -0{,}\widehat{3}$; $c_4 = 0{,}25$; …; $c_{999} = -0{,}001…$; $c_{1\,000} = 0{,}001$

Los términos impares son negativos y tienden a 0.

Los términos pares son positivos y tienden a 0.

Por tanto, c_n sí tiene límite: $lím\ c_n = 0$

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Estudia el comportamiento de estas sucesiones para términos muy avanzados e indica su límite:

a) $a_n = \frac{2n - 3}{6}$ b) $b_n = \frac{2n - 3}{n + 5}$

c) $c_n = 3 - 2^n$ d) $d_n = 5 - \frac{1}{n^3}$

4. Di, razonadamente, cuáles de las siguientes sucesiones tienen límite:

a) $a_n = -\frac{2}{n^2}$ b) $b_n = (-1)^n \frac{n}{n+4}$

c) $c_n = (-1)^n\, n$ d) $d_n = (-1)^n \frac{2}{n^2}$

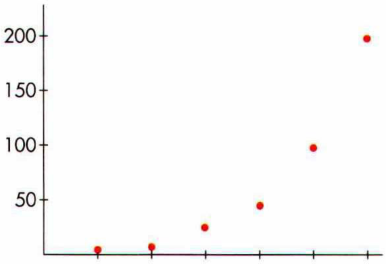
2.4 ALGUNOS LÍMITES IMPORTANTES

Suma de los términos de una progresión geométrica

Recordemos la expresión de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $r \neq 1$:

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1}$$

Calculemos el límite de esta expresión para los distintos valores de r:



$r > 1$	$a_1 > 0$	*lím* $S_n = +\infty$

$\boxed{r > 1}$ r^n se hace tan grande como queramos.

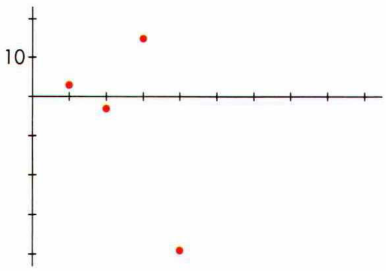
Por tanto: $S_n \to +\infty$ si $a_1 > 0$

$S_n \to -\infty$ si $a_1 < 0$

Por ejemplo, si $a_1 = 3$ y $r = 2$, la progresión es 3, 6, 12, 24, 48, 96, …

Los valores de S_n son 3, 9, 21, 45, 93, 189, …

Es claro que $S_n \to +\infty$.



$r < -1$	S_n no tiene límite

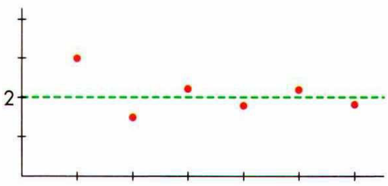
$\boxed{r < -1}$ $|r^n|$ se hace tan grande como queramos. r^n es positivo si n es par y negativo si n es impar.

Por tanto, S_n no tiene límite.

Por ejemplo, si $a_1 = 3$, $r = -2$, la progresión es 3, –6, 18, –54, …

Los valores de S_n son 3, –3, 15, –39, … Los términos pares tienden a $-\infty$ y los impares a $+\infty$.

Por tanto, S_n no tiene límite.



$-1 < r < 1$	*lím* $S_n = \dfrac{a_1}{1 - r}$

$\boxed{-1 < r < 1}$ *lím* $S_n = \dfrac{a_1}{1 - r}$ porque $r^n \to 0$ (Al multiplicar reiteradamente por un número $|r| < 1$, el resultado es cada vez más próximo a 0).

Por ejemplo, para $a_1 = 3$ y $r = -\frac{1}{2}$, la progresión es $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$

Los valores de S_n son 3; 1,5; 2,25; 1,875; 2,0625; 1,96875; …

Es claro que $S_n \to 2$. Según la fórmula, $\dfrac{3}{1 - (-1/2)} = \dfrac{3}{3/2} = 2$.

$\boxed{r = 1}$ La progresión es $a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots$ Su suma es $S_n = n\,a_1$.

Es claro que si $a_1 > 0$, $S_n \to +\infty$ y si $a_1 < 0$, $S_n \to -\infty$.

$\boxed{r = -1}$ La progresión es $a_1, -a_1, a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots$

Los valores de S_n son a_1, 0, a_1, 0, a_1, 0, …

Por tanto, S_n no tiene límite.

RESUMEN

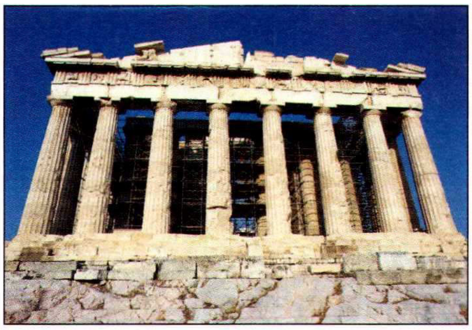
	$r \leq -1$	$-1 < r < 1$	$r \geq 1$
$a_1 > 0$	S_n no tiene límite	$S_n \to \dfrac{a_1}{1 - r}$	$S_n \to +\infty$
$a_1 < 0$			$S_n \to -\infty$

NOTA HISTÓRICA

El matemático suizo **Leonhard Euler** (1707-1783) es, probablemente, junto a Arquímedes, Newton y Gauss, uno de los cuatro matemáticos más importantes de la historia.

Se puede afirmar, sin ninguna duda, que nuestro sistema de notaciones matemáticas es hoy lo que es debido más a Euler que a ningún otro matemático. El número e, base de los logaritmos neperianos, lleva este nombre en su honor (inicial de su apellido).

En tu CD se te explica cómo trabajar: con **DERIVE** (3) y con **CALCULADORA GRÁFICA** (4) algunos aspectos de esta unidad.



El alzado del Partenón de la Acrópolis ateniense sigue la proporción áurea.

El número e

El número e, que ya conoces de cursos anteriores y que hemos utilizado en la unidad anterior como base de los logaritmos neperianos, se obtiene como límite de una sucesión. Veámosla:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Obtengamos algunos de sus términos con ayuda de la calculadora:

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 1{,}33333^3 = 2{,}37037037$$

$$a_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 1{,}25^4 = 2{,}44140625$$

$$a_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 1{,}2^5 = 2{,}48832$$

$$a_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 1{,}1^{10} = 2{,}59374246$$

$$a_{100} = 1{,}01^{100} = 2{,}70481383; \quad a_{1\,000} = 1{,}001^{1\,000} = 2{,}71692393$$

$$a_{1\,000\,000} = 2{,}71828047; \quad a_{1\,000\,000\,000} = 2{,}71828182$$

Parece evidente que existe el límite. Su valor es:

$$lím \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182\ldots = e$$

El número áureo, Φ

En la página inicial de esta unidad vimos que el cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci es el número áureo. Concretemos aquí el resultado:

Si a_n es la sucesión de Fibonacci: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, la sucesión $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ tiene por límite el número áureo:

$$lím\ b_n = lím \frac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1{,}618\ldots$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Obtén los ocho primeros valores de a_n (términos de la sucesión) y de S_n (sumas parciales) en cada una de las progresiones siguientes. Calcula en cada una el $lím\ S_n$:

a) 125, 50, 20, … b) 125, –50, 20, …

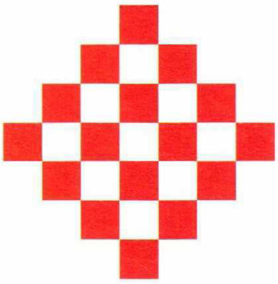
c) 17, –17, 17, … d) 17, 17, 17, …

e) 10; 12; 14,4; … f) 10; –12; 14,4; …

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

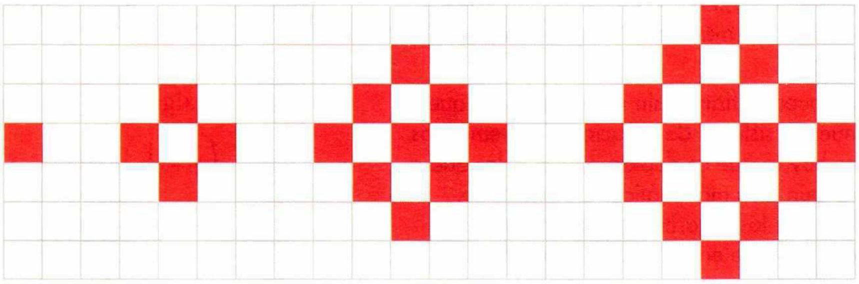
1 Sucesiones

Observa esta figura formada por cuadrados blancos y rojos. Tiene 7 cuadrados de anchura.



Queremos hacer una figura similar con 99 cuadrados de anchura. Calcula el número de cuadrados que necesitaremos y cuántos serán rojos y cuántos blancos.

Formamos la sucesión y observamos la anchura de cada figura:



Las anchuras de las sucesivas figuras son: 1, 3, 5, 7, …, $2n - 1$

Como $2n - 1 = 99 \rightarrow n = 50$, la figura que buscamos es la que ocupa el lugar 50.

Contamos el número de cuadrados blancos y rojos:

Nº DE FIGURA	1	2	3	4	5	…	n
CUADRADOS ROJOS	1	4	9	16	25	…	n^2
CUADRADOS BLANCOS	0	1	4	9	16	…	$(n-1)^2$
TOTAL	1	5	13	25	41	…	$n^2 + (n-1)^2$

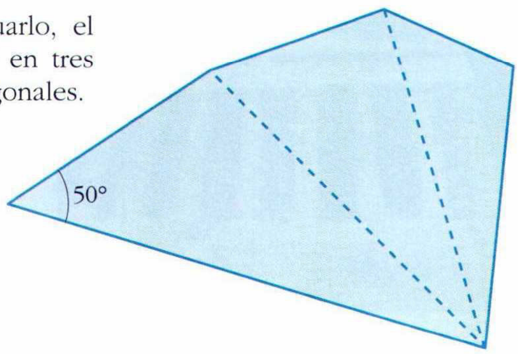
Por tanto, la figura que se busca tendrá $50^2 + 49^2 = 4\,901$ cuadrados en total, de los que 2 500 serán rojos y 2 401 serán blancos.

2 Progresión aritmética

Los ángulos de un pentágono convexo están en progresión aritmética y el menor mide 50º. Encuentra la medida de los demás.

¿Cuál es la suma de los cinco ángulos del pentágono?

Recuerda que para averiguarlo, el pentágono se descompone en tres triángulos trazando dos diagonales.



Así, comprobamos que la suma de los ángulos del pentágono es:

$$180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$$

Como $a_1 = 50$ y $a_5 = 50 + 4d$, escribimos la suma de los cinco términos de la progresión:

$$S_n = \frac{50 + 50 + 4d}{2} \cdot 5 = 540 \rightarrow 250 + 10d = 540 \rightarrow d = 29$$

Los ángulos miden 50°, 79°, 108°, 137° y 166°.

3 Término general

Halla el término general de cada una de las sucesiones siguientes:

a) $\frac{11}{3}, \frac{8}{7}, \frac{5}{11}, \frac{2}{15}, \dots$

b) *2,9; 2,99; 2,999; 2,9999; …*

c) $-\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}, \dots$

a) No es una progresión aritmética ni geométrica. Sin embargo, la sucesión formada por los numeradores 11, 8, 5, 2, es una progresión aritmética con $a_1 = 11$, $d = -3$ y $a_n = 11 + (n-1)(-3) = 14 - 3n$.

También los denominadores forman una progresión aritmética con $b_1 = 3$, $d = 4$ y $b_n = 3 + (n-1)4 = 4n - 1$.

Por tanto, el término general de la sucesión es $c_n = \frac{14 - 3n}{4n - 1}$.

b) Podemos escribir los términos de la sucesión así:

$3 - \frac{1}{10}, 3 - \frac{1}{100}, 3 - \frac{1}{1\,000}, \dots$ Término general: $a_n = 3 - \frac{1}{10^n}$.

c) Comprobamos que es una progresión aritmética ya que:

$$a_2 - a_1 = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{6}{3} = 2$$

Lo mismo ocurre con las diferencias $a_3 - a_2$ y $a_4 - a_3$.

$$a_1 = -\frac{8}{3};\quad d = 2;\quad a_n = -\frac{8}{3} + (n-1)2 \;\rightarrow\; a_n = 2n - \frac{14}{3}$$

4 Límite de una sucesión

Halla el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$$

Calculamos términos de la sucesión para valores grandes de n:

$$a_{100} = \frac{2 \cdot 100^2 - 1}{100^2 + 3} = 1{,}9993 \qquad a_{1\,000} = \frac{2 \cdot 1\,000^2 - 1}{1\,000^2 + 3} = 1{,}999993$$

Observa que, según va creciendo n, menor importancia tienen en el resultado final los números –1 y 3 que acompañan a n^2 en el numerador y el denominador. Si prescindiéramos de ellos, el límite sería evidente:

$$\text{lím}\ \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3} = \text{lím}\ \frac{2n^2}{n^2} = 2$$

5 Límite de una sucesión

Estudia si las siguientes sucesiones tienen límite:

a) $a_n = \frac{2 + (-1)^{n+1}}{n}$

b) $b_n = \frac{1 + n(-1)^n}{n}$

a) Escribimos los primeros términos de la sucesión:

$$a_1 = 3;\quad a_2 = 0{,}5;\quad a_3 = 1;\quad a_4 = 0{,}25;\quad a_5 = 0{,}6;\quad a_6 = 0{,}1\widehat{6}$$

Calculamos algunos términos avanzados:

$$a_{100} = \frac{1}{100} = 0{,}01;\quad a_{101} = 0{,}0297;\quad a_{1\,001} = 0{,}00299$$

Observamos que $\text{lím}\ a_n = 0$.

b) $b_1 = \frac{1-1}{1} = 0;\quad b_2 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5;\quad b_3 = \frac{1-3}{3} = -0{,}\widehat{6};\quad b_4 = 1{,}25$

$b_{100} = \frac{1 + 100}{100} = 1{,}01;\quad b_{101} = \frac{1 - 101}{101} = -0{,}99;$

$b_{1\,000} = 1{,}001;\quad b_{1\,001} = -0{,}999$

Observamos que los términos pares se aproximan a 1 y los impares a –1. La sucesión no tiene límite.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Criterio para formar sucesiones

1 Describe el criterio con el que se forman estas sucesiones y añade tres términos a cada una:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

b) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \ldots$

c) $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$

d) $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$

e) $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

2 Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son estos:

a) $a_n = 3 + \frac{2}{10^n}$ b) $b_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

c) $c_n = \frac{3n - 1}{n + 1}$ d) $d_n = 2^{-n}$

e) $e_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ f) $f_n = \frac{(-1)^n\, n - n}{2}$

3 Escribe el término general de estas sucesiones:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

c) $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}, \ldots$

d) 5,1; 5,01; 5,001; 5,0001; …

4 Construye dos sucesiones cuyas leyes de recurrencias sean las siguientes:

a) $a_1 = 0 \quad a_2 = 2 \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$

b) $a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_n = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

5 Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:

a) $4, 7, 3, -4, -7, \ldots$

b) $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Progresiones aritméticas

6 De las siguientes sucesiones, di cuáles son progresiones aritméticas y escribe su término general:

a) 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; 6; …

b) 5; 4,6; 4,2; 3,8; 3,4; …

c) 1, 2, 4, 7, 11, …

d) 14, 13, 11, 8, 4, …

7 De las sucesiones siguientes, indica cuáles son progresiones aritméticas:

a) $a_n = 3n$ b) $b_n = 5n - 4$

c) $c_n = \frac{1}{n}$ d) $d_n = \frac{8 - 3n}{4}$

e) $e_n = 5 + \frac{n}{2}$ f) $f_n = n^2 - 1$

8 Calcula los términos a_{10} y a_{100} de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $-4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

b) $2, -3, -8, -13, -18, \ldots$

c) $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots$

9 Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 3, 6, 9, 12, 15, … b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; …

c) $c_n = 4n - 2$ d) $d_n = \frac{1 - 2n}{2}$

Progresiones geométricas

10 De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones geométricas? Escribe tres términos más en cada una y también su término general.

a) 32, 16, 8, 4, 2, … b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; …

c) 1, 4, 9, 16, 25, … d) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots$

11 Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y halla la suma de los infinitos términos en los casos que sea posible:

a) $a_1 = 32, \; r = \frac{1}{2}$ b) $a_1 = 10, \; r = \frac{1}{10}$

c) $a_1 = 2^{-10}, \; r = 2$ d) $a_1 = -5, \; r = -\frac{1}{4}$

Suma de potencias

12 a) Demuestra que:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

b) Calcula la suma de los cuadrados de los 50 primeros números pares.

c) Calcula la suma de los cuadrados de todos los números impares menores que 100.

13 Halla la suma siguiente:

$$21^3 + 22^3 + 23^3 + \ldots + 37^3 + 38^3 + 39^3 + 40^3$$

Límite de una sucesión

14 Calcula los términos a_{10}, a_{100} y $a_{1\,000}$, en cada sucesión e indica cuál es su límite:

a) $a_n = \dfrac{1}{n-1}$ b) $a_n = \dfrac{2n+5}{n}$

c) $a_n = \dfrac{5}{n} - 1$ d) $a_n = 3 - 7n$

15 Halla algunos términos muy avanzados de las siguientes sucesiones e indica cuál es su límite:

a) $a_n = 5n - 10$ b) $b_n = 100 - n$

c) $c_n = \dfrac{n-3}{n+1}$ d) $d_n = \dfrac{n}{2n+1}$

16 Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:

a) $a_n = 3n^2 - 10$ b) $b_n = 3n - n^2$

c) $c_n = 10 - 5n + n^2$ d) $d_n = (1 - 2n)^2$

e) $e_n = (4 - n)^3$ f) $f_n = 1 - (n + 2)^2$

17 Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:

a) $a_n = \dfrac{1}{3n}$ b) $b_n = \dfrac{5}{3n+2}$

c) $c_n = \dfrac{3}{n+1}$ d) $d_n = \dfrac{3n}{n^2+1}$

e) $e_n = \dfrac{1}{n^2}$ f) $f_n = \dfrac{-100}{n^2}$

g) $g_n = (-1)^n$ h) $h_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

PARA RESOLVER

18 Calcula el 15º término en la siguiente progresión:

3; 2,7; 2,4; 2,1; …

19 Halla el cuarto término de una progresión aritmética en la que $d = 3$ y $a_{20} = 100$.

20 Calcula la suma de todos los números impares de tres cifras.

21 ¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros múltiplos de 7?

22 En una progresión aritmética sabemos que $d = 3$, $a_n = 34$ y $S_n = 133$. Calcula n y a_1.

23 Los lados de un hexágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el mayor mide 13 cm y que el perímetro vale 48 cm.

24 En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima fila está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?

25 Escribe los términos intermedios de una progresión aritmética sabiendo que $a_1 = -3$ y $a_{10} = 18$.

26 Halla los dos términos centrales de una progresión aritmética de 8 términos sabiendo que $S_8 = 100$ y que $a_1 + 2a_8 = 48$.

27 En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $a_3 = 0{,}5$. Calcula a_5 y la expresión de a_n.

28 En una progresión geométrica de razón $r = 3$ conocemos $S_6 = 1\,456$. Calcula a_1 y a_4.

29 La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20% de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento?

30 El 1 de enero depositamos 5 000 € en una cuenta bancaria a un interés anual del 6% con pago mensual de intereses. ¿Cuál será el valor de nuestro dinero un año después?

☛ *Un 6% anual corresponde a* $\dfrac{6}{12} = 0{,}5\%$ *mensual. Cada mes el dinero se multiplica por 1,005.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

31 La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y $a_2 = 1$. Calcula a_1 y la razón.

32 Comprueba, dando a n valores grandes, que las siguientes sucesiones tienden a un número y di cuál es ese número:

a) $a_n = \dfrac{5n-3}{2n+1}$ b) $b_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+1}$

c) $c_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$ d) $d_n = \dfrac{2n^2-5}{n^3}$

33 Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{(n-1)^2}{n^2+3}$ b) $b_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

c) $c_n = \dfrac{3n+1}{\sqrt{n}}$ d) $d_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+2}}$

e) $e_n = \dfrac{(1+n)^3}{(n-2)^2}$ f) $f_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

34 Comprueba si tienen límite las siguientes sucesiones:

a) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n+1}{n}$ b) $b_n = 1 + (-1)^n$

c) $c_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ d) $d_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$

35 Dadas las sucesiones $a_n = n^2$ y $b_n = \dfrac{1}{n^2+1}$, estudia el límite de:

a) $a_n + b_n$ b) $a_n \cdot b_n$ c) $\dfrac{a_n}{b_n}$

36 Durante 5 años depositamos en un banco 2 000 € al 4% con pago anual de intereses.

a) ¿En cuánto se convierte cada depósito al final del quinto año?

b) ¿Qué cantidad de dinero hemos acumulado durante esos 5 años?

37 Recibimos un préstamo de 2 000 € al 10% de interés anual y hemos de devolverlo en 4 años, pagando cada año los intereses de la parte adeudada más la cuarta parte del capital prestado. Calcula lo que tenemos que pagar cada año.

38 Halla el término general de la sucesión: 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{2}$, … y estudia su límite.

39 Dadas las sucesiones $a_n = n + 3$ y $b_n = 2 - n$, calcula los siguientes límites:

a) $\lim (a_n + b_n)$ b) $\lim (a_n - b_n)$

c) $\lim (a_n \cdot b_n)$ d) $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$

40 La sucesión $x^2 - x + 1$; $x^2 + 1$; $x^2 + x + 1$, ¿es una progresión aritmética?

Si lo fuese, calcula el quinto término y la suma de los cinco primeros términos.

41 Halla la siguiente suma:

$$11^3 + 13^3 + 15^3 + 17^3 + \dots + 33^3$$

CUESTIONES TEÓRICAS

42 Sea a_n una progresión aritmética con $d > 0$. ¿Cuál es su límite?

43 Si a_n es una progresión geométrica con $r = \dfrac{1}{3}$, ¿cuál es su límite?

44 La sucesión 3, 3, 3, 3, … puede considerarse una progresión aritmética y también geométrica. ¿Cuál es la diferencia en el primer caso? ¿Y la razón en el segundo?

45 En una progresión geométrica cualquiera, $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$, comprueba que:

$$a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4$$

¿Se verifica también $a_3 \cdot a_7 = a_4 \cdot a_6$? Enuncia una propiedad que exprese los resultados anteriores.

46 El número $3,\overset{\frown}{9}$ podemos considerarlo como la suma de los infinitos términos de la sucesión:

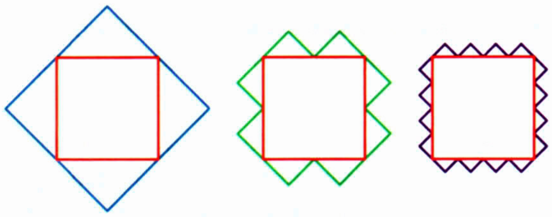
$$3, \frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1\,000}, \dots$$

Calcula la suma y halla su límite. ¿Te parece razonable el resultado obtenido?

47 Inventa dos sucesiones cuyo límite sea infinito y que, al dividirlas, la sucesión que resulte tienda a 2.

PARA PROFUNDIZAR

48 Dibuja un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm y sobre cada lado un triángulo rectángulo isósceles; después dos, luego cuatro, como indican las figuras:



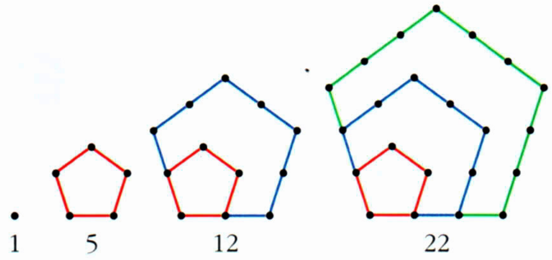
a) Forma la sucesión de los perímetros de las figuras obtenidas. ¿Cuál es su límite?

b) Forma también la sucesión de las áreas. ¿Cuál es su límite?

49 Los términos de la sucesión 1, 3, 6, 10, 15 se llaman números triangulares porque se pueden representar así:

Calcula a_{10} y a_n.

50 Los términos de la sucesión 1, 5, 12, 22, 35 se llaman números pentagonales porque se pueden representar así:



Calcula a_6, a_{10} y a_n.

☛ *Esos números se pueden escribir así:*

1; 1 + 4; 1 + 4 + 7; 1 + 4 + 7 + 10; 1 + 4 + 7 + 10 + 13

51 Utiliza las propiedades de las progresiones para simplificar la expresión del término general y calcular el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2}$

b) $b_n = 2n\left(\dfrac{1}{n^3} + \dfrac{2}{n^3} + \dfrac{3}{n^3} + \ldots + \dfrac{n}{n^3}\right)$

AUTOEVALUACIÓN

1. Halla el término a_{47} de la sucesión cuyo término general es:

$$a_n = \frac{n^2 - 709}{n + 3}$$

2. Halla el término octavo de la sucesión definida así:

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 7, \quad a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$$

3. Halla el término general de las sucesiones:

a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, …

b) 1, 2, 5, 10, 17, 26, …

4. Halla la ley de recurrencia por la que se forman las siguientes sucesiones:

a) 7, 8, 15, 23, 38, 61, …

b) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, …

c) 0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, …

5. Halla las siguientes sumas:

a) $3 + 7 + 11 + \ldots + 43$

b) $1\,000 + 1\,000 \cdot 1{,}1 + 1\,000 \cdot 1{,}1^2 + \ldots + 1\,000 \cdot 1{,}1^{15}$

c) $80 + 40 + 20 + 10 + 5 + \ldots$

d) $101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 140^2$

e) $3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + 15^3$

6. En una progresión aritmética conocemos $a_{15} = 43$ y $a_{86} = 85{,}6$.

a) Calcula $a_1 + a_{100}$.

b) Obtén el valor de a_{220}.

7. Halla los límites de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{5}{n} \qquad b_n = \frac{5 + 3n}{n + 1} \qquad c_n = \frac{n^2 + 1}{5n}$$

5. En tu CD tienes las resoluciones de todos estos ejercicios.